Nachname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Studiengang:

Fachsemester:

Klausur Mathematik für Medieninformatiker II
SS 2019

Bitte ZUERST lesen!!!

- Notieren Sie oben links bitte Ihren Namen, Matrikelnummer, Studiengang und Fachsemester!
- Bleistifte sind als Schreibmittel nicht zugelassen.
- Mobiltelefone schalten Sie bitte für die Zeit der Klausur ab!
- Erlaubte Hilfsmittel sind ein Taschenrechner (nicht grafikfähig) und ein selbstbeschriebenes A4-Blatt (Vorder- und Rückseite).
- Ein Täuschungsversuch zieht das Nicht-Bestehen der Klausur nach sich.
- Alle Rechenwege müssen nachvollziehbar sein.
- Die Klausur dauert 90 Minuten.
- Bitte benutzen Sie für jede Aufgabe ein separates Blatt!

Durch Ihre Unterschrift bestätigen Sie, dass Sie die Prüfungsvorschriften gelesen und akzeptiert haben, und dass Sie gesund und in der Lage sind, an der Prüfung teilzunehmen.

Unterschrift: ....

Punktetabelle (bitte NICHT ausfüllen):

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	$\sum$	Note
Punkte							

Aufgaben

(1) (8 Punkte) Welchen Wahrheitswert haben die folgenden Aussagen? Kreuzen Sie an:

Aussage	wahr	falsch
$90°$ entspricht $\pi/4$ im Bogenmaß.		
$\{(x, y) \,:\, 3x = 2y\}$ ist ein UVR des $\mathbb{R}^2$.		
Für $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ gilt $\det(2A^2) = 4(\det(A))^2$.		
Ein $m \times n$ LGS mit $n > rg(A)$ ist eindeutig lösbar		

Begründen Sie Ihre Entscheidungen!

(2) (i) (2 Punkte) Es seien $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ Vektoren, mit den Eigenschaften
- $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$,
- Der Winkel α' zwischen $\vec{u}$ und $-\vec{v}$ ist $\alpha' = \pi/3$.

Berechnen Sie $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ und $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

(ii) (4×2 Punkte) Gegeben sind die Ebene $E : x_1+2x_2+3x_3 = 6$ und der Punkt $P = (3, 2, 1)$.
(a) Bestimmen Sie die Gerade g welche den Punkt P enthält und senkrecht auf E steht.
(b) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Ebene E mit der Geraden g' durch die Punkte $A = (1, 0, 0)$ und $B = (0, 0, 1)$.
(c) Bestimmen Sie den Schnittwinkel zwischen E und die Ebene $E' : 3x_1 - x_3 = 0$.
(d) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E.

(3) (2+2 Punkte) Gegeben ist eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit der Eigenschaft, dass $A^3 = E_3$.
(i) Zeigen Sie: A ist invertierbar und $A^{-1} = A^2$.
(ii) Berechnen Sie $\det\left(A^T \cdot ((-3)A^2)\right)$.

(4) (4+1 Punkte) Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= a, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 0, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= -5, \end{aligned}$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist.

(i) Bestimmen Sie, mit Hilfe des Gauß-Verfahrens, a derart dass das LGS unendlich viele Lösungen besitzt. Bestimmen Sie in diesem Fall die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ dieses LGS.
(ii) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}_0$ des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems.

(5) (2+1 Punkte)

(i) Sei

$$U = \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \;:\; f(x) - e^x f(2x) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}.$$

Prüfen Sie, ob U ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist.

(ii) Sei

$$U = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \;: A \text{ ist invertierbar und } 2A + 3A^T = 0\}.$$

Prüfen Sie, ob U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist.