Nachname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Studiengang:

Fachsemester:

Klausur Mathematik für Medieninformatiker I
WS 2018/19

Bitte ZUERST lesen!!!

- Notieren Sie oben links bitte Ihren Namen, Matrikelnummer, Studiengang und Fachsemester!
- Bleistifte sind als Schreibmittel nicht zugelassen.
- Mobiltelefone schalten Sie bitte für die Zeit der Klausur ab!
- Erlaubte Hilfsmittel sind ein Taschenrechner (nicht grafikfähig) und ein selbstbeschriebenes A4-Blatt (Vorder- und Rückseite).
- Ein Täuschungsversuch zieht das Nicht-Bestehen der Klausur nach sich.
- Alle Rechenwege müssen nachvollziehbar sein.
- Die Klausur dauert 90 Minuten.
- Bitte benutzen Sie für jede Aufgabe ein separates Blatt!

Durch Ihre Unterschrift bestätigen Sie, dass Sie die Prüfungsvorschriften gelesen und akzeptiert haben, und dass Sie gesund und in der Lage sind, an der Prüfung teilzunehmen.

Unterschrift: ....

Punktetabelle (bitte NICHT ausfüllen):

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	$\sum$	Note
Punkte							

Aufgaben

---

(1) (8 Punkte) Welchen Wahrheitswert haben die folgenden Aussagen? Kreuzen Sie an:

Aussage	wahr	falsch
$(0 < 1) \vee (2 \mid 2019)$		
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = (x+1)^2$ ist injektiv.		
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 1$		
$\int_1^4 (x^{1/2} - \frac{1}{3}x^{-1/2})\, dx = 4.$		

Begründen Sie Ihre Entscheidungen!

(2) (i) (3 Punkte) Untersuchen Sie, ob die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$$

injektiv, surjektiv, bijektiv ist. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Umkehrfunktion.

(ii) (3 Punkte) Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & , \quad x \leq 0, \\ \\ a \sin x + a^2 \cos x & , \quad x > 0. \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$ für die f stetig ist.

(3) Sei eine Folge $(a_n)_n$ rekursiv definiert durch

$$a_0 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + 4}{5}, \; n \in \mathbb{N}.$$

(i) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $a_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(ii) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $(a_n)_n$ monoton wachsend ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Differenz $a_{n+1} - a_n$.

(iii) (2 Punkte) Begründen Sie, dass $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ existiert und bestimmen Sie diesen Grenzwert.

(4) Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_n$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(i) (2 Punkt) $a_n = \left(\frac{n}{n^2+1}\right)^3$.

(ii) (3 Punkte) $a_n = \frac{3n^3+1}{n^2+1}\left(\frac{n^2}{n^2+n} - 1\right)$.

(5) Gegeben sei die Funktion $f(x) = \ln\left(\frac{4}{x^2+4}\right)$.

(i) (1 Punkt) Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich von f.

(ii) (2 Punkte) Bestimmen Sie das Monotonieverhalten von f, sowie alle Extrempunkte.

(iii) (2 Punkte) Bestimmen Sie das Krümmungsverhalten von f.

(iv) (2 Punkte) Skizzieren Sie den Graph der Funktion f.